数学Ⅱ・数学B

（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 Oを原点とする座標平面上に2点A(6, 0)，B(3, 3)をとり，線分ABを2：1に内分する点をP，1：2に外分する点をQとする。3点O, P, Qを通る円をCとする。

(1) Pの座標は$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$であり，Qの座標は$\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$である。

(2) 円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り，OPに垂直な直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カキ}}\,x + \boxed{\text{ク}}$$

であり，線分PQの中点を通り，PQに垂直な直線の方程式は

$$y = x - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

これらの 2 直線の交点が円 C の中心であることから，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{コ}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{サ}}\right)^2=\boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち，点 O と異なる交点を R とすると，R は線分 OA を $\boxed{\text{セ}}$: 1 に外分する。

(数学Ⅱ・数学B第 1 問は次ページに続く。)

(1)

P の座標

$$\frac{1\times \mathrm{A}+2\times \mathrm{B}}{1+2}=\frac{\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\quad \therefore \mathrm{P}(4,2)$$

Q の座標

AB を a ： b に外分する点は，

AB を a ： $-b$ に内分する点あるいは $-a$ ： b に内分する点でもある。

これより，AB を 1：2 に外分する点 Q を，

AB を -1 ：2 に内分する点あるいは 1： -2 に内分する点として，

$$\frac{2\times \mathrm{A}+(-1)\times \mathrm{B}}{2+(-1)}=\frac{2\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}\quad \therefore \mathrm{Q}(9,-3)$$

(2)

線分 OP の中点を通り，OP に垂直な直線の方程式

OP の傾き＝$\frac{1}{2}$ より，OP に垂直な直線の傾き＝-2

求める直線の方程式を $y=-2x+b$ とおくと，OP の中点 $(2,1)$ を通るから，

$1=-4+b\quad \therefore b=5\quad \therefore y=-2x+5$

線分 PQ の中点を通り，PQ に垂直な直線の方程式

PQ の傾き＝$\frac{-3-2}{9-4}=-1$ より，PQ に垂直な直線の傾き＝1

求める直線の方程式を $y=x+c$ とおくと，

PQ の中点 $\left(\frac{4+9}{2},\frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{13}{2},-\frac{1}{2}\right)$ を通るから，$-\frac{1}{2}=\frac{13}{2}+c\quad \therefore c=-7\quad \therefore y=x-7$

円 *C* の方程式

円の中心の座標は，$\begin{cases}y=-2x+5\\y=x-7\end{cases}$ の解だから，$(4,-3)$

原点を通るから，半径の 2 乗は，$4^2+(-3)^2=25$

よって，$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

(3)

円 C の中心を C とすると，△OCR は CO＝CR の二等辺三角形であり，

二等辺三角形の性質より $x=4$ は OR の中点を通る。これより，$\mathrm{R}(8,0)$

よって，OR：RA＝8：2＝4：1

すなわち R は線分 OA を 4：1 に外分する。

数学Ⅱ・数学B

〔2〕 連立方程式

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする。

$X=2^x$, $Y=2^y$, $Z=2^z$ とおくと，$x \leqq y \leqq z$ により $X \leqq Y \leqq Z$ である。

(*)から，X, Y, Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ=\boxed{\text{ソ}} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

(数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。)

この関係式を利用すると，t の3次式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$

$$=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t-\boxed{\text{ソ}}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{\text{テ}}\right)\left(t-\boxed{\text{トナ}}\right)$$

となる。したがって，$X \leqq Y \leqq Z$ により

$$X=\frac{1}{2},\ Y=\boxed{\text{テ}},\ Z=\boxed{\text{トナ}}$$

となり，$x=\log_{\boxed{\text{ニ}}}X$，$y=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Y$，$z=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Z$ から

$$x=\boxed{\text{ヌネ}},\ y=\boxed{\text{ノ}},\ z=\boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

XYZ

$XYZ = 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 2^{x+y+z} = 2^3 = 8$

XY＋YZ＋ZX

$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{49}{16}$ より，$\frac{XY + YZ + ZX}{XYZ} = \frac{49}{16}$

$\therefore XY + YZ + ZX = XYZ \cdot \frac{49}{16} = 8 \cdot \frac{49}{16} = \frac{49}{2}$

***X,Y,Z* の値**

$$\begin{aligned}(t - X)(t - Y)(t - Z) &= t^3 - (X + Y + Z)t^2 + (XY + YZ + ZX)t - XYZ \\ &= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{49}{2}t - 8 \\ &= \frac{1}{2}\left(2t^3 - 35t^2 + 49t - 16\right)\end{aligned}$$

補足：分数係数は面倒なので，$\frac{1}{2}$ で括った。

ここで，$2t^3 - 35t^2 + 49t - 16 = 0$ の 1 つの解が $\frac{1}{2}$ だから，

組立除法により，他の解は，$t = 1,16$

これと $X \leq Y \leq Z$ より，$X = \frac{1}{2}, Y = 1, Z = 16$

***x,y,z* の値**

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ より，$x = \log_2 X, y = \log_2 Y.z = \log_2 Z$

よって，$x = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$，$y = \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$，$z = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

数学Ⅱ・数学B

第2問 （必答問題）（配点　30）

a を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$$

とする。

関数 $y=f(x)$ は，$x=$ $\boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき，2点

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}\right),\ \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

と原点を通る放物線

$$y=\boxed{\text{ク}}\,x^2-\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

を C とする。原点における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{サシ}}\,a^{\boxed{\text{ス}}}x$$

である。また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y=\frac{1}{\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}}x$$

である。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

数学Ⅱ・数学B

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y=-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

を D とする。D と ℓ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}a^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，0 と $\dfrac{4a^{\boxed{\text{ト}}}+1}{2a^{\boxed{\text{ナ}}}}$ である。C と m で囲まれた図形の面積を T とする。$S=T$ となるのは $a^{\boxed{\text{テ}}}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであり，このとき，$S=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

関数 $y=f(x)$ の導関数は，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$（$a>0$）より，
$x=-a$ で極大値 $f(-a)=-a^3+3a^3+a^3=3a^3$ をとり，
$x=a$ で極小値 $f(a)=a^3-3a^3+a^3=-a^3$ をとる。
この 2 点 $(-a,3a^3)$，$(a,-a^3)$ と原点を通る放物線を C とすると，
放物線 C は原点を通るから，その方程式は，$y=px^2+qx$ と表せる。
これと $3a^3=pa^2-qa$，$-a^3=pa^2+qa$ より，$p=a$，$q=-2a^2$
よって，$y=ax^2-2a^2x$
これを放物線 C とする。
原点における C の接線 l の方程式を $y=rx$ とおくと，
$y'=2ax-2a^2$ より，$r=2a\cdot 0-2a^2=-2a^2$
よって，l：$y=-2a^2x$
また，原点を通り 1 に垂直な直線 m の方程式を $y=sx$ とおくと，$rs=-1$ より，

$$s=-\frac{1}{r}=-\frac{1}{-2a^2}=\frac{1}{2a^2}$$

よって，m：$y=\dfrac{1}{2a^2}x$

$y=-ax^2+2a^2x$ を D とする。
D と l で囲まれた図形の面積 S は
D と l の交点の x 座標と $\dfrac{1}{6}$ 公式から求めることができる。

D と l の交点の x 座標は，$-ax^2+2a^2x=-2a^2x$ より，$x=0,4a$

よって，$S=\dfrac{a}{6}(4a-0)^3=\dfrac{32}{3}a^4$

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，$ax^2-2a^2x=\dfrac{1}{2a^2}x$ の解だから，

これを解くことにより，$x=0,\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

C と m で囲まれた図形の面積を T とすると，$\dfrac{1}{6}$ 公式より

$$T=\frac{a}{6}\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}-0\right)^3=\frac{a}{6}\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$$

よって，$S=T$ となるのは，$\dfrac{32}{3}a^4=\dfrac{a}{6}\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3 \Leftrightarrow 64a^3=\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3 \Leftrightarrow (4a)^3=\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$

$\Leftrightarrow 4a=\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$ より，$a^4=\dfrac{1}{4}$ のときであり，このとき $S=\dfrac{8}{3}$ である。

数学Ⅱ・数学B　第3問～第6問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問 （選択問題）（配点　20）

(1) 数列$\{p_n\}$は次を満たすとする。

$$p_1 = 3,\ p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

数列$\{p_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよう。まず，①から

$$p_{n+1} - \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となるので，数列$\{p_n\}$の一般項は

$$p_n = \frac{1}{\boxed{ウ}\cdot\boxed{エ}^{n-2}} + \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

である。したがって，自然数nに対して

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\left(1 - \frac{1}{\boxed{ケ}^{n}}\right) + \frac{\boxed{コ}n}{\boxed{サ}}$$

である。

(2) 正の数からなる数列$\{a_n\}$は，初項から第3項が$a_1 = 3$，$a_2 = 3$，$a_3 = 3$であり，すべての自然数nに対して

$$a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2}} \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすとする。また，数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を，自然数nに対して，$b_n = a_{2n-1}$，$c_n = a_{2n}$で定める。数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよう。まず，②から

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} = \boxed{シ},\ a_5 = 3,\ a_6 = \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}},\ a_7 = 3$$

である。したがって，$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 3$となるので

$$b_n = 3 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots ③$$

と推定できる。

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

③を示すためには，$b_1=3$ から，すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1}=b_n \qquad \cdots\cdots ④$$

であることを示せばよい。このことを「まず，$n=1$ のとき④が成り立つことを示し，次に，$n=k$ のとき④が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも④が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法を $\boxed{ソ}$ という。$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

⓪ 組立除法　① 弧度法　② 数学的帰納法　③ 背理法

［Ⅰ］ $n=1$ のとき，$b_1=3$，$b_2=3$ であることから④は成り立つ。

［Ⅱ］ $n=k$ のとき，④が成り立つ，すなわち

$$b_{k+1}=b_k \qquad \cdots\cdots ⑤$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，②の n に $2k$ を代入して得られる等式と，$2k-1$ を代入して得られる等式から

$$b_{k+2}=\frac{c_k+\boxed{タ}_{k+1}}{\boxed{チ}_{k+1}},\quad c_{k+1}=\frac{\boxed{ツ}_k+c_k}{\boxed{テ}_{k+1}}$$

となるので，b_{k+2} は

$$b_{k+2}=\frac{\left(\boxed{ト}_k+\boxed{ナ}_{k+1}\right)\boxed{ニ}_{k+1}}{b_k+c_k}$$

と表される。したがって，⑤により，$b_{k+2}=b_{k+1}$ が成り立つので，④は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

［Ⅰ］，［Ⅱ］により，すべての自然数 n に対して④の成り立つことが証明された。したがって，③が成り立つので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3$ である。

次に，②の n を $2n-1$ に置き換えて得られる等式と③から

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となり，$c_1=\boxed{ヌ}$ であることと①から，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，(1)で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

(1)

漸化式

特性方程式 $x=\frac{1}{3}x+1$ より，$x=\frac{3}{2}$

よって，$p_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)\quad (n=1,2,3,\cdots)$

一般項

$$p_n-\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(3-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\qquad \therefore p_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}+\frac{3}{2}$$

数列の和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}p_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\cdot 3^{k-2}}+\frac{3}{2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\cdot 3^{k-2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\\&=\frac{\dfrac{1}{2\cdot 3^{1-2}}-\dfrac{1}{2\cdot 3^{(n+1)-2}}}{1-\dfrac{1}{3}}+\frac{3}{2}n\\&=\frac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}}}{\dfrac{2}{3}}+\frac{3}{2}n\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\right)+\frac{3}{2}n\\&=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{3}{2}n\end{aligned}$$

補足

等比数列 $\{a_n\}$ の公比を r とすると，$\{a_n\}$ の第 x 項から第 y 項までの和＝$\displaystyle\sum_{k=x}^{y}a_k=\frac{a_x-a_{y+1}}{1-r}$

(2)

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{3+3}{3}=2$$

$$a_6=\frac{a_3+a_4}{a_5}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$b_{k+2}=a_{2(k+2)-1}=a_{2k+3}=\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}=\frac{c_k+b_{k+1}}{c_{k+1}}$$

$$c_{k+1}=a_{2(k+1)}=a_{2k+2}=\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k+1}}=\frac{b_k+c_k}{b_{k+1}}$$

$b_{k+2}=\dfrac{c_k+b_{k+1}}{c_{k+1}}$， $c_{k+1}=\dfrac{b_k+c_k}{b_{k+1}}$ より， $b_{k+2}=\dfrac{c_k+b_{k+1}}{\dfrac{b_k+c_k}{b_{k+1}}}=\dfrac{(c_k+b_{k+1})b_{k+1}}{b_k+c_k}$

これと $b_k=b_{k+1}$ より， $b_{k+2}=\dfrac{(c_k+b_k)b_{k+1}}{b_k+c_k}=b_{k+1}$

$a_{n+3}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+2}}$ の n を $2n-1$ に置き換えると， $a_{2n+2}=\dfrac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_{2n+1}}$ より，

$c_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n}{b_{n+1}}=\dfrac{3+c_n}{3}=\dfrac{1}{3}c_n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$ となり，

$c_1=a_2=3$ であることと①から，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，

(1)で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

数学Ⅱ・数学B　第3問～第6問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第4問 （選択問題）（配点　20）

$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OC}=4$，$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ である平行四辺形 OABC において，線分 OA を $3:2$ に内分する点を D とする。また，点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{c}$ と表す。

(1)　t を $\cos\theta$ を用いて表そう。

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{DB}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\vec{c},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{\text{オ}}$ により

$$t=\frac{\boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}\cos\theta+1\right)}{\boxed{\text{ク}}\left(\cos\theta+\boxed{\text{ケ}}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

となる。

(2)　点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし，線分 OC は両端の点 O，C を含むものとする。以下，$r=\cos\theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから，$0\leqq t\leqq 1$ である。$-1<r<1$ なので，① の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}}\left(r+\boxed{\text{ケ}}\right)$ は正である。したがって，条件 $0\leqq t\leqq 1$ は

$$0\leqq\boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}r+1\right)\leqq\boxed{\text{ク}}\left(r+\boxed{\text{ケ}}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

となる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

r についての不等式②を解くことにより，θ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$$

であることがわかる。

(3)　$\cos\theta = -\frac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし，三角形 BEF の面積を求めよう。①により，$t = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\vec{c}$$

となる。したがって，点 F は線分 AE を 1 : $\boxed{\text{テ}}$ に内分する。このことと，平行四辺形 OABC の面積は $\frac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であることから，三角形 BEF の面積は $\frac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{3}{5}\vec{a}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}$，　$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=20\cos\theta$

$\mathrm{AE}\perp\mathrm{DB}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}&=(t\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)\\&=\left(\frac{2}{5}t-1\right)\vec{a}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2-\frac{2}{5}|\vec{a}|^2\\&=\left(\frac{2}{5}t-1\right)\cdot 20\cos\theta+16t-10\\&=8(\cos\theta+2)t-10(2\cos\theta+1)\end{aligned}$$

より，$8(\cos\theta+2)t-10(2\cos\theta+1)=0$　$\therefore t=\frac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}$

(2)

$t=\frac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}$，$\cos\theta=r\ (-1<r<1)$，$0\le t\le 1$ より，$0\le\frac{5(2r+1)}{4(r+2)}\le 1$

$\therefore 0\le 5(2r+1)\le 4(r+2)\Leftrightarrow 0\le 10r+5\le 4r+8\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le r\le\frac{1}{2}$　$\therefore -\frac{1}{2}\le\cos\theta\le\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$

(3)

$\cos\theta=-\frac{1}{8}$ のとき，$t=\frac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}=\frac{5\left(-\frac{1}{4}+1\right)}{4\left(-\frac{1}{8}+2\right)}=\frac{1}{2}$

点 F が線分 BD を $1-t:t$ に内分，線分 AE を $u:1-u$ に内分する点とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t(\vec{a}+\vec{c})+(1-t)\cdot\frac{3}{5}\vec{a}=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}t\right)\vec{a}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\vec{a}+\frac{u}{2}\vec{c}$

$\therefore \frac{3}{5}+\frac{2}{5}t=1-u, t=\frac{u}{2}$　$\therefore t=\frac{1}{6}, u=\frac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

したがって，点 F は線分 AE を 1：2 に内分する。

平行四辺形 OABC の面積＝$|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta = 5\cdot 4\cdot\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2} = \dfrac{15\sqrt{7}}{2}$

$\dfrac{\Delta\mathrm{BEF}}{\Delta\mathrm{BEA}} = \dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\Delta\mathrm{BEA}}{\mathrm{OABC}} = \dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{\Delta\mathrm{BEF}}{\mathrm{OABC}} = \dfrac{\Delta\mathrm{BEF}}{\Delta\mathrm{BEA}}\cdot\dfrac{\Delta\mathrm{BEA}}{\mathrm{OABC}} = \dfrac{1}{3}$　$\therefore \Delta\mathrm{BEA} = \dfrac{\mathrm{OABC}}{3}$

よって，BEF の面積は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15\sqrt{7}}{2} = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$